Apellido y nombres: ....
Padrón: .... Correo electrónico: ....
Cursada. Cuatrimestre: .... Año: .... Profesor: ....

Análisis Matemático III.
Examen Integrador. Cuarta fecha. 22 de julio de 2015.

1		2		3		4	
a	b	a	b	a	b	a	b

Justificar claramente todas las respuestas. La aprobación del examen requiere la correcta resolución de al menos 4(cuatro) ítems, entre los cuales debe figurar uno del ejercicio 1 o del 2 y uno del ejercicio 3 o del 4.

Ejercicio 1.

(a) Sea D un conjunto abierto y conexo del plano complejo. Probar que dos funciones holomorfas en D que coinciden en un punto de D, y tienen igual parte real, son iguales en todo D.

(b) Probar que si f es holomorfa para $|z|>R$, continua en $|z|=R$ y su límite en infinito es cero, entonces existe $m\in\mathbb{N}$ tal que $|f(z)|\leq\dfrac{c}{|z|^m}$ para $|z|>R$ y algún $c>0$.

Ejercicio 2.

(a) Sea $u(x,y)$ la distribución de temperaturas en régimen estacionario que evoluciona en la placa semiinfinita y bajo las condiciones de frontera que se indican:

$$\begin{array}{lll} \nabla^2 u(x,y)=0 & \text{para} & |x|<1 \ \wedge \ y>0 \\ u(1,y)=1 & \text{para} & y>0 \\ u(-1,y)=1 & \text{para} & y>0 \\ u(x,0)=0 & \text{para} & x\in(-1,1) \end{array}$$

Hallar la función de distribución y describir gráfica y analíticamente las líneas isotérmicas y las líneas de flujo.

(b) Si el desarrollo exponencial de Fourier en $[-\pi,\pi]$ de $(x-\pi)\,\text{sen}(x+\pi)$ es $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n e^{inx}$, argumentar la convergencia de las series $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n$, $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}|\alpha_n|^2$ y $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}n^2\alpha_n^2$. Calcular el valor de cada una.

Ejercicio 3.

(a) Hallar $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ que cumpla: $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}(1+i)\hat{f}(w)e^{iwt}dw=e^{-2t}H(t)$, siendo $\hat{f}(w)=\mathcal{F}[f](w)$ y $H(t)$ la función de Heaviside. ¿ Es única? Calcular $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}(w)\right|^2dw$.

(b) Analizar la existencia de la transformada de Fourier de $f(t)=\dfrac{1}{t}$. En caso afirmativo, hallarla, y a partir de ésta, calcular la de $\dfrac{\text{sen}(2\pi t)}{t-1}$.

Ejercicio 4.

(a) Resolver: $\left\{\begin{array}{l} y_1'(t)-y_2(t)=0 \\ y_1(t)-y_2'(t)=r(t)\end{array}\right.$ con $r(t)=\left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si } t\leqslant 1 \\ 1 & \text{si } t>1\end{array}\right.$
y condiciones iniciales nulas. ¿Cuál es el valor de $y_1(1-\pi/3)$ y de $y_2(1-\pi/3)$?

(b) Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s^2+a^2)^2}\right]$ cualquiera sea $a\in\mathbb{R}$.